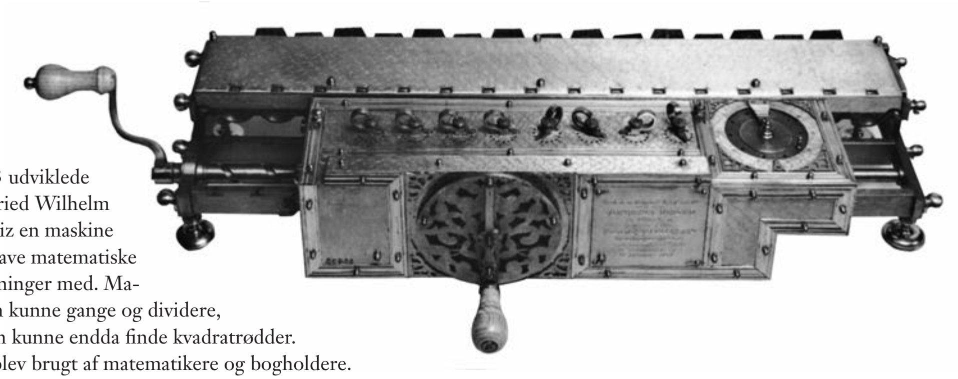
vise sig indirekte, i forandret form, som f.eks. neurotiske symptomer eller fejlhandlinger. Det ubevidste er imidlertid ikke bare en art skjult bevidsthed, men er knyttet til træk ved mennesket, der er kropslige, og fungerer efter andre lovmæssigheder, "primærprocesserne". De "love", som er nogle helt andre end logikkens og den rationelle tænknings, var det netop den psykoanalytiske teoris opgave at redegøre for.

Dermed var selve ideen om eksistens af egentlige psykologisk betingede sygdomme, der selv var af psykologisk natur, etableret. Disse skulle opfattes psykologisk, knyttet til et menneskes oplevelser og samspil med andre mennesker, og skulle behandles på samme måde. Ved gendannelse, gentagelse og forståelse af skjulte betydninger, var det – under medvirken af et andet menneske, en terapeut – muligt at forme sig selv på ny, på en måde hvor de psykologiske sår var helet. Det var psykoterapi. Psykoanalysen blev således det bedste eksempel på en teori om psykologisk betingede sygdomme og deres behandling. Psykoanalysen blev dog ikke kun en lægevidenskabelig og psykologisk disciplin, men fik langt bredere betydning for forståelsen af kunst, sprog, og samfundsmæssige fænomener. Tidligere teoridannelser havde naturligvis også haft konsekvenser for f.eks. kunstnerisk praksis, men psykoanalysen fik på en helt unik måde direkte betydning for en ny kunstopfattelse, nemlig surrealismen, både inden for billedkunst og litteratur.

Hvad er et tal?

Også matematikken gjorde i 1800-tallet meget store fremskridt og blev for alvor en selvstændig disciplin. Franskmanden Évariste Galois (1811-32) grundlagde gruppeteorien, man arbejdede bredt med analysen, og geometrien fik nyt liv og nyt grundlag. Men der viste sig også sprækker i fundamentet. Besad man en reel forståelse af, hvad det egentlig var, man arbejdede med? Hvad var egentlig substansen i den matematiske viden? Det bekymrede nogle, at man tilsyneladende ikke kunne give særligt gode svar. Især det fundamentale begreb om "tal" blev genstand for interesse. Flere mente, at matematikken måtte være af en anden art end de rent empiriske videnskaber. Selvom man forsøgte at forstå matematikken som empirisk, begyndte man også i visse kredse at anse den som en erkendelse af den type, som Kant havde kaldt apriori, dvs. forud for erfaringen.

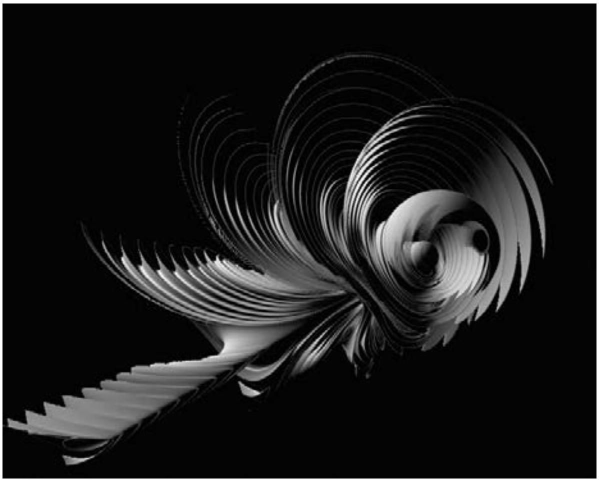
Siden man begyndte at tælle, har man primært betragtet tal som noget,



I 1673 udviklede Gottfried Wilhelm Leibniz en maskine til at lave matematiske beregninger med. Maskinen kunne gange og dividere, og den kunne endda finde kvadratrødder. Den blev brugt af matematikere og bogholdere. Her ses en rekonstruktion fra 1923.

der var knyttet til et antal af enheder. Man talte f.eks. sine får. Men man har også brugt tal til at måle med, f.eks. når man vejede noget. Hvis det bestod af små ting, såsom korn, kunne man i princippet sige, at man vejede ved at tælle antallet af korn – under den antagelse, at de alle var identiske. Men hvis man målte en væskes mængde eller vægt, eller bare et linjestykkes længde, var det mere uklart, hvad man egentlig talte. Man kunne fastsætte en enhed, som man så målte med. Men denne enhed kunne i princippet være vilkårligt lille. Længden af et givet linjestykke ville så blive udtrykt med større og større tal, når enheden, man målte med, blev mindre og mindre. Men længden var selvfølgelig den samme, bare udtrykt med et andet tal. Det var også væsentligt ved tal set som antal, at man ikke løb ind i et største tal – der kunne være ubegrænset mange tal. Tilsvarende kunne et givet linjestykke opdeles i ubegrænset mange dele eller enheder, der så blev ubegrænset små. Forholdet mellem tal og mål havde optaget matematikere og filosoffer siden antikken. Dér havde man indset, at et så simpelt forhold som forholdet mellem siden i et kvadrat og diagonalen ikke kunne udtrykkes som forholdet imellem to hele tal. Tilsvarende gjaldt også om forholdet imellem længden af en cirkels omkreds og den samme cirkels diameter, det forhold, man så betegnede med udtrykket π. Siden man i 1600-tallet begyndte at erstatte geometriske metoder i beskrivelsen af naturen med aritmetiske – og specielt siden Isaac Newton (1642-1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) udviklede analysen, dvs. studiet af kontinuerte fænomener som f.eks. bevægelse med matematiske metoder – havde man frembragt mere og mere avancerede teknikker til håndtering af fysiske fænomener. Man kunne udtrykke dette i formler, der i en vis forstand hvilede i sig selv. Men disse formler kunne kun relateres til observationer via målinger, og målinger resulterede typisk i tal.

Quaternioner blev første gang beskrevet af den irske matematiker William Rowan Hamilton (1805-65) i 1843 i et forsøg på at udvikle en notation for komplekse tal i højere dimensioner. En quaternion består af et reelt tal og tre komplekse tal og kan danne meget komplicerede firedimensionale fraktalformer, hvis man programmerer dem ind i en computer i dag. Her ses et forsøg af den tyske kunstner Thorsten Fleisch (f. 1972) i filmen *Gestalt* fra 2003. Quaternioner blev senere erstattet af vektor- og matrix-notationer og bruges i dag kun inden for computergrafik til at rotere 3D-objekter med · Thorsten Fleisch, www.fleischfilm.com.

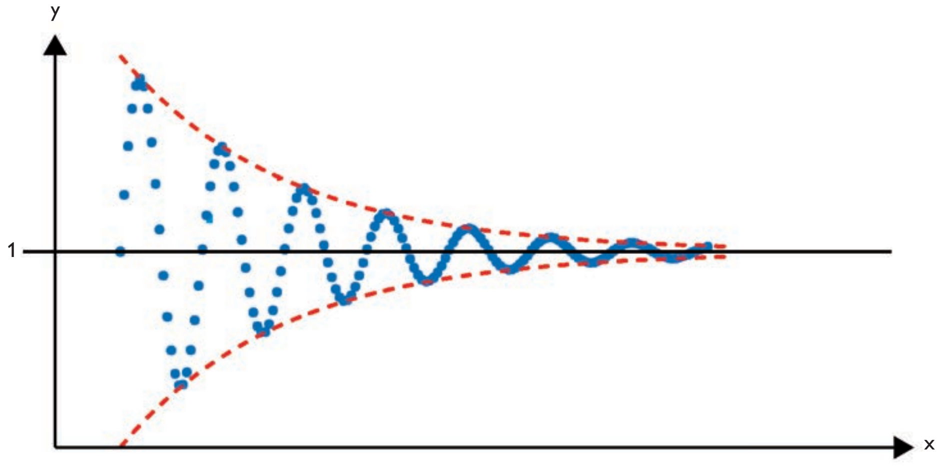


I midten af 1800-tallet var det blevet klart, at man reelt ikke forstod, hvad tal egentlig var for noget. Man arbejdede med mange forskellige former for tal – hele tal, negative tal, rationelle tal, irrationale tal, komplekse tal og sågar noget man kaldte quaternioner – og samtidig arbejdede man med begreber som længde og størrelse af et areal, der jo netop kunne variere kontinuert og dermed antage en vilkårlig størrelse.

Det er umiddelbart ret let at indse, at hvis man spørger om, hvor mange længder, der kan være mellem 0 og 100 meter, så er svaret uendeligt mange, for man kan ikke angive en mindste størrelse, som en sådan længde skulle kunne opdeles i. Man kan altid findele yderligere. Hvis man ønsker at udtrykke disse længder som tal og opfatter disse som en proportion, f.eks. som forholdet mellem en enhed og antallet af gange, denne enhed går op i længden, så er antallet også uendeligt, men der er stadig mange længder, som faktisk kan forekomme, som man ikke får med. Eksempelvis hvis man opdeler 100 meter i to dele på hver 50 meter, og så afsætter en længde ud fra nulpunktet svarende til længden af diagonalen i et kvadrat, hvor hver side er 50 meter. Ud fra Pythagoras' (ca. 580-500 f.v.t.) læresætning vil længden være $\sqrt{500}$, og den er igen identisk med 10 gange $\sqrt{5}$, der er et irrationalt tal, dvs. at det netop ikke kan udtrykkes som en brøk. Der er altså ikke noget forhold mellem tal, der kan udtrykke denne længde. Ikke desto mindre arbejdede man flittigt i de matematiske formuleringer af videnskabelige teorier med funktionelle sammenhænge, som, hvis de skulle have empirisk mening, måtte kunne knyttes sammen med tal via målinger. Yderligere havde man traditionelt en teori om måling, der sagde, at en sådan netop var et udtryk for det antal af gange, en given enhed kunne anvendes eller bruges på det, der måltes. Når man målte en længde, gik man ud fra en enhed – f.eks. en meter – og målingen bestod så i at finde ud af, hvor mange gange meteren gik op i den givne længde. Man kunne netop derfor udtrykke det som en proportion, som en brøk. Men man kunne tit komme ud for, at det antal så at sige ikke var et tal.

De problemer, som man havde haft, siden Leibniz udarbejdede hvad han kaldte infinitesimalregning, dvs. med at opfatte differentiering og integrering som regning med en særlig slags små, uendeligt små, størrelser (se s. 118) – dem begyndte man at kunne se løsninger på i begyndelsen af 1800-tallet. Franskmanden Augustin Louis Cauchy (1790-1857) formulerede en opfattelse af differentiering og integrering, der baserede sig på, at der var tale om relationer mellem funktioner og egenskaber ved disse. Det centrale begreb for ham var "grænse" i den betydning, at vi kan nærme os en grænse, men ikke overskride den, dvs. vi kan komme vilkårligt tæt på. Det væsentlige var, at han forsøgte at definere dette, uden at skulle tale om uendeligt små størrelser eller regne med dem. Dette involverede distinktionen mellem, at noget er uendeligt, og at noget er ubegrænset. At sige, at der er uendeligt mange tal, er at tale om dem alle sammen – uendeligt mange af dem. Men at sige, at der er ubegrænset mange, er at sige, at lige gyldigt hvilket tal, der kommer på tale, så er det altid muligt at angive et tal, der er større. I tilfældet med definition af grænseværdi-begrebet drejede det sig så om at gøre en forskel, ikke uendeligt lille, men vilkårligt lille – i betydningen at der altid ubegrænset kunne findes en forskel, der er mindre. Taler vi om tallet 1, kan vi altså angive en brøk, f.eks. $\frac{128}{129}$, der er meget tæt på 1, men $\frac{1128}{1129}$ er tættere på osv. Det interessante er nu, at også her gælder, at selvom vi har mange af den slags tal, der nærmer sig 1, så er der også her mange, vi ikke får med, selvom vi altså taler om en ubegrænset serie af tal, der nærmer sig til 1, og hvor forskellen mellem tallet og 1 kan gøres vilkårligt lille.

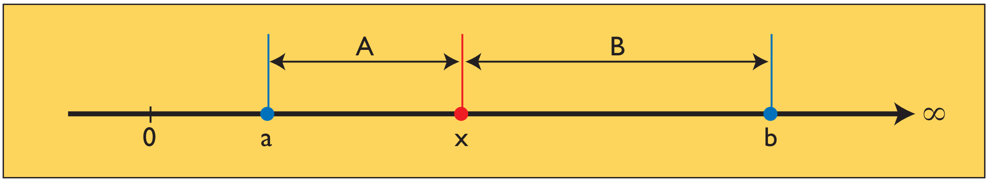
Helt op til midten af 1800-tallet tænkte man om tal i to begrebsrammer. Den ene var aritmetisk, det var tal til at tælle med, og den anden var geometrisk, og havde med kurver at gøre. Fra og med midten af 1800-tallet forsøgte flere og flere matematikere at give en fuldstændig forståelse af analysen, dvs. infinitesimalregningen, ved hjælp af klare aritmetiske begreber. Man ønskede altså at få den aritmetiske og den geometriske forståelse



For at give mening til konceptet om en grænseværdi udviklede Cauchy nogle bestemte matematiske sekvenser. Det var nogle ordnede lister af elementer $\{a_1, a_2,..., a_n\}$, som har den egenskab, at de konvergerer mod et bestemt tal. Her ses en Cauchy-sekvens i blåt, som for stigende n har en "ultimativ destination", dvs. en grænse, i værdien 1.

til at hænge sammen. Den tyske matematiker Richard Dedekind (1831-1916) ydede en afgørende indsats i denne bestræbelse. Hvis en linje bestod af uendeligt mange punkter, og der var flere punkter, der lå i en afstand fra nulpunktet, end der var punkter, som kunne udtrykkes med rationelle tal, dvs. med brøker, så kunne de, der ikke var brøker, forstås som grænser for serier af brøker, der nærmede sig vilkårligt tæt til dem. De såkaldte irrationale tal var således at forstå som grænseværdier, og de eksisterede på samme måde som andre grænseværdier.

Dedekind udviklede, hvad der var en teori om de reelle tal. Det er de tal, der kan udtrykkes som længder af linjestykker, og som man kan skrive som uendelige decimalbrøker, men hvor man altså kan komme i den situation, at et givet tal på denne form faktisk aldrig fuldt kan nedskrives, da man jo ikke kan skrive en uendelig lang serie af cifre, men altid kan skrive et tal, der er vilkårligt tæt på det tal, man egentlig ville skrive. Tallet $\sqrt{2}$ eller tallet π, der jo begge "geometrisk set" har klare definitioner, kan f.eks. aldrig med et endeligt antal cifre skrives ned. En anden væsentlig grund til, at man i højere grad begyndte at tænke aritmetisk om tal, var, at man forstod dem som løsninger til ligninger – ligninger af alle mulige slags. $\sqrt{2}$ er som bekendt løsning til ligningen $x^2 = 2$, der jo bare geometrisk siger, at vi søger længden af diagonalen i et kvadrat med siden 1, ligesom π er forholdet imellem længden af en-



Matematikkens standard-definition af de reelle tal, dvs. alle tal undtagen komplekse tal, er det såkaldte Dedekind-snit, publiceret i 1872. Det siger, at hvis alle punkter på en lige linje falder i to klasser, A og B, hvor den ene klasse ligger til højre for et bestemt punkt x, og den anden klasse ligger til venstre for samme punkt x, så eksisterer der kun et punkt, nemlig x, som definerer snitpunktet for de to klasser. Hvis snittet producerer et rationelt tal, har vi hermed defineret det. Hvis det ikke producerer et rationelt tal, men falder mellem to rationelle tal, definerer vi det som et irrationalt tal.

hver cirkels omkreds og længden af samme cirkels diameter. Dedekind nåede sine resultater allerede i 1858, men da det var ret kontroversielle resultater, publiceredes de først i bredere kredse i 1872.

Dedekinds forskningsprogram med at udtrykke de væsentligste matematiske begreber i de teorier, der anvendtes til beskrivelse af forhold i naturen i form af aritmetiske operationer på tal, førte så til en analyse af begrebet tal. For man måtte jo starte med de naturlige tal 1,2,3,4..., og hvad var det egentlig for noget? Dedekind indså, at man kunne definere disse ved at antage, at i hvert fald tallet 1 var et tal, og at der fandtes en funktion, der som sit input kunne tage et tal og som output levere et nyt, der også var et tal, og hvor der var lagt en enhed til. Hvis man altså startede med 1, så ville man få, at funktionen – lad os kalde den S – ville levere et tal, S(1), der så kunne kaldes 2, og da det var et tal, kunne det indgå, og man kunne tale om S(2), der så var 3 osv. Denne proces kunne køre ubegrænset. Men alt dette ser ud som om, vi alligevel definerer og analyserer tal med tal.

Samtidig med Dedekind havde matematikeren Georg Cantor (1845-1918) udviklet en ny art matematisk teori, mængdelæren, der ikke udtalte sig om tal, men i al almindelighed om ansamlinger af genstande eller objekter. Det afgørende var, at man kunne operere med mængder uden at kende antallet af deres elementer. F.eks. kunne man afgøre, om to mængder havde samme antal elementer uden at behøve vide, hvor mange der var. Cantor kunne endda definere, hvad det ville sige, at der var uendeligt mange elementer i en mængde: nemlig at en sådan mængde havde del-mængder med lige så mange elementer som selve mængden. Et eksempel er jo, at i mængden af naturlige tal er der masser af delmængder, f.eks. mængden af lige tal, der også er uendeligt mange af. Endvidere kunne Cantor vise, at en mængde af elementer altid har flere delmængder, end der er elementer i mængden, hvilket ville sige, at en uendelig mængde af elementer, f.eks. de naturlige tal, havde flere end uendeligt mange delmængder. Det forekom besynderligt. Men med mængdeteorien kunne Cantor og Dedekind definere – vi kunne også sige konstruere – de naturlige tal ud fra antagelsen om, at der fandtes bare én genstand i verden og også den mængde, som havde netop denne genstand som sit element. For hvis der var en genstand, så var der også en mængde med denne genstand som element. Men hvis en sådan mængde fandtes, så var det en ny genstand, og denne kunne så være element i en ny mængde osv. Den første mængde kunne vi kalde 0, den næste 1 og den næste igen 2 osv. Da de hele tiden ville være delmængder af hinanden, fik man en serie af mængder, der var ordnet. Man kunne tale om, at mængderne hele tiden havde et større og større antal elementer, og at de kunne ordnes i en rækkefølge og således tælles op. Der var således to slags tal: kardinaltal, der sagde noget om antal, og ordinaltal, der sagde noget om rækkefølge. Problemet var at finde et første element, som man kunne være sikker på eksisterede. Det blev den tomme mængde, man satsede på, for den kunne udtrykkes som mængden af genstande, der ikke var identiske med sig selv. Og det var der jo ingen genstande, der ikke var, ergo var mængden tom. Men mængden, der havde den tomme mængde som element, måtte så også eksistere, og så var processen i gang. Man kunne sige hokuspokus, og tallene var definerede. Man behøvede bare mængdeteorien og lidt logik.

Det så simpelt ud, men viste sig mere problematisk, end man skulle tro (se s. 262). I de følgende årtier blev der arbejdet meget med denne type analyser af grundlæggende matematiske begreber, begreber der var så grundlæggende, at de også var afgørende elementer i vores grundlæggende forståelse af verden. Især Dedekinds og Cantors grundlagsarbejde inden for matematikken og logikken har sidenhen ført til en lang række nye og højt avancerede formelle systemer med egne symboler og transformationsregler – som kun ganske få mennesker kan forstå. ZFC-mængdelæren baserer sig for eksempel på 10 aksiomer, mens Bertrand Russell (1872-1970) udviklede den såkaldte type-teori for at undgå de værste paradokser.

Det blev dog Gottlob Frege (1848-1925), der gav et bud på, hvordan man kunne analysere selve tal-begrebet. Dermed skabte han også en sondring mellem at bidrage til viden inden for et givet domæne, og så bidrage til forståelsen af de begreber, med hvilke man udtrykte og talte om denne viden. Det blev kimen til en afgørende ændring af forståelsen af forholdet mellem empirisk videnskab og filosofisk refleksion, eller analyse, som det kom til at hedde.

Den sproglige vending i filosofien

Den matematiker og filosof, som mere end nogen anden forsøgte at afklare begreberne, var tyskeren Gottlob Frege. Han er central, fordi han ses som den første teoretiker, der foretager det, der er blevet kaldt "den sproglige vending". Han forsøger at løse problemer ved omhyggelig og detaljeret analyse af begreber og sprog, ved at gøre sig klart, hvad det egentlig er, vi siger og gør, når vi tænker. Han forstår ikke tænkning som en psykologisk aktivitet. Det, der interesserer ham, er derimod at afdække de logiske sammenhænge, der ligger bag, hvad vi siger, og de strukturer, der ligger i dette. Han betegnes ofte som filosoffernes filosof, da han er en uhyre krævende tænker, der bevæger sig på et uhørt højt teknisk og abstrakt niveau. Han formulerer nogle centrale teoretiske standpunkter, der er aldeles overraskende. De er karakteriseret dels ved, at nogle af dem er blevet stående som væsentlige filosofiske standpunkter, og dels ved, at det har været muligt at vise, at andre er forkerte.

Frege er således en filosof og teoretiker, der foretager monumentalt væsentlige fejltagelser. Det er disse væsentlige fejltagelser, eftertiden lærer af. På den måde er udviklingen omkring Frege også et alternativ til hans kollega Friedrich Nietzsches (1844-1900) opfattelse, at filosofien blot erstatter det ene sæt af metaforer med det andet – uden at der i egentligste forstand vindes ny erkendelse. Rent fagvidenskabeligt er han grundlæggeren af den moderne logik, den såkaldte matematiske logik, idet han ønskede at bedrive logik på samme måde, som man bedrev matematik. Men han mente bestemt ikke, at logik var matematik – derimod mente han, at matematik var logik. Freges projekt gik ud på at aflede hele aritmetikken og analysen fra logikken – han var "logicist". Han mente heller ikke, at logik havde noget med psykologi at gøre, tværtimod måtte psykologien også opfylde logikkens love. Således var tænkning ikke en indre håndtering af mentale entiteter – begreber – eller erkendelse via repræsentation af den ydre verden. Han var altså også imod det erkendelsesteoretiske projekt, som blev startet af Descartes (1596-